Class Notes for CS 818A4 - Spring 2004

SEPARATION LOGIC

5. Iterated Separating Conjunction

John C. Reynolds
Department of Computer Science
Carnegie Mellon University

Revised April 8, 2004

Iterated Separating Conjunction

$$\langle\text{assert}\rangle ::= \cdots \mid \bigodot_{\langle\text{var}\rangle=\langle\text{exp}\rangle}^{\langle\text{exp}\rangle} \langle\text{assert}\rangle$$

$s, h \vDash \bigodot_{v=e}^{e'} p$ iff

$\quad$ **let** $m = [\![e]\!]_{\text{exp}} s,\ n = [\![e']\!]_{\text{exp}} s,\ I = \{\, i \mid m \leq i \leq n \,\}$ **in**

$\quad\quad \exists H \in I \to \text{Heaps}.$

$\quad\quad\quad \forall i, j \in I.\ i \neq j$ implies $Hi \perp Hj$

$\quad\quad\quad$ and $h = \bigcup\{\, Hi \mid i \in I \,\}$

$\quad\quad\quad$ and $\forall i \in I.\ [\, s \mid v\colon i \,], Hi \vDash p.$

Axiom Schemata

$$m > n \Rightarrow \Big(\bigodot_{i=m}^{n} p(i) \Leftrightarrow \mathbf{emp} \Big)$$

$$m = n \Rightarrow \Big(\bigodot_{i=m}^{n} p(i) \Leftrightarrow p(m) \Big)$$

$$k \leq m \leq n+1 \Rightarrow \Big(\bigodot_{i=k}^{n} p(i) \Leftrightarrow \Big(\bigodot_{i=k}^{m-1} p(i) \ * \ \bigodot_{i=m}^{n} p(i) \Big) \Big)$$

$$\bigodot_{i=m}^{n} p(i) \Leftrightarrow \bigodot_{i=m-k}^{n-k} p(i+k)$$

$$m \leq n \Rightarrow \Big(\Big(\bigodot_{i=m}^{n} p(i) \Big) \ * \ q \Leftrightarrow \bigodot_{i=m}^{n} (p(i) \ * \ q) \Big)$$

when q is pure and $i \notin \mathrm{FV}(q)$

$$m \leq j \leq n \Rightarrow \Big(\Big(\bigodot_{i=m}^{n} p(i) \Big) \Rightarrow (p(j) \ * \ \mathbf{true}) \Big)$$

Array Allocation

$$\langle\text{comm}\rangle ::= \cdots \mid \langle\text{var}\rangle := \textbf{allocate}\ \langle\text{exp}\rangle$$

Semantics

$$\frac{}{(s,h)\,[\![v := \textbf{allocate}\ e]\!]_{\text{comm}}\,([\,s \mid v\colon \ell\,], h\cdot h'),}$$

where $h \perp h'$ and p $\operatorname{dom} h' = \{\, i \mid \ell \le i < \ell + [\![e]\!]_{\exp} s\,\}$.

Inference Rules

Noninterfering:

$$\frac{}{\{r\}\ v := \textbf{allocate}\ e\ \{(\bigodot_{i=v}^{v+e-1} i \mapsto -)\ *\ r\},}$$

where v does not occur free in r or e.

The local form:

$$\frac{}{\{v\!=\!v' \wedge \textbf{emp}\}\ v := \textbf{allocate}\ e\ \{\bigodot_{i=v}^{v+e'-1} i \mapsto -\},}$$

where v' is distinct from v, and e' denotes $e/v \to v'$.

The global form:

$$\frac{}{\{r\}\ v := \textbf{allocate}\ e\ \{\exists v'.\ (\bigodot_{i=v}^{v+e'-1} i \mapsto -)\ *\ r'\},}$$

where v' is distinct from v, $v' \notin \mathrm{FV}(e,r)$, e' denotes $e/v \to v'$, and r' denotes $r/v \to v'$.

The backward-reasoning form:

$$\frac{}{\{\forall v''.\ (\bigodot_{i=v''}^{v''+e-1} i \mapsto -) \mathrel{-\!\!*} p''\}\ v := \textbf{allocate}\ e\ \{p\},}$$

where v'' is distinct from v, $v'' \notin \mathrm{FV}(e,p)$, and p'' denotes $p/v \to v''$.

A Cyclic Buffer Using an Array

We assume that an n-element array has been allocated at location l. Let $\phi(x)$ be the unique integer such that

$$\phi(x) \equiv_{\mathrm{mod}\ \mathsf{n}} x \qquad\qquad \mathsf{l} \leq \phi(x) < \mathsf{l} + \mathsf{n}.$$

We will use the variables

m	number of active elements
i	pointer to first active element
j	pointer to first inactive element

Let R abbreviate the assertion

$$R \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0 \leq \mathsf{m} \leq \mathsf{n} \land \mathsf{l} \leq \mathsf{i} < \mathsf{l} + \mathsf{n} \land \mathsf{l} \leq \mathsf{j} < \mathsf{l} + \mathsf{n} \land \mathsf{j} \equiv_{\mathrm{mod}\ \mathsf{n}} \mathsf{i} + \mathsf{m}$$

It is easy to show that

$$\{R \land \mathsf{m} < \mathsf{n}\}$$
$$\mathsf{m} := \mathsf{m} + 1\,;\ \mathbf{if}\ \mathsf{j} = \mathsf{l} + \mathsf{n} - 1\ \mathbf{then}\ \mathsf{j} := \mathsf{l}\ \mathbf{else}\ \mathsf{j} := \mathsf{j} + 1$$
$$\{R\}$$

and

$$\{R \land \mathsf{m} > 0\}$$
$$\mathsf{m} := \mathsf{m} - 1\,;\ \mathbf{if}\ \mathsf{i} = \mathsf{l} + \mathsf{n} - 1\ \mathbf{then}\ \mathsf{i} := \mathsf{l}\ \mathbf{else}\ \mathsf{i} := \mathsf{i} + 1$$
$$\{R\}$$

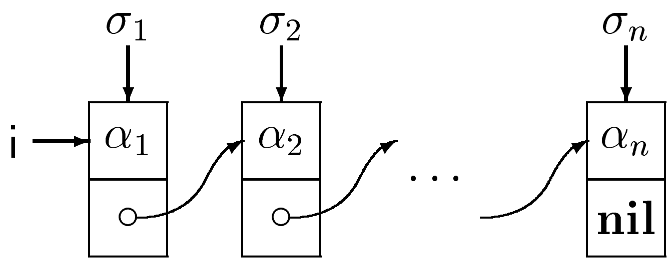
When the buffer contains a sequence α, it should satisfy

$$((\textstyle\bigodot_{\mathsf{k}=0}^{\mathsf{m}-1} \phi(\mathsf{i}+\mathsf{k}) \mapsto \alpha_{\mathsf{k}+1}) \ * \ (\bigodot_{\mathsf{k}=0}^{\mathsf{n}-\mathsf{m}-1} \phi(\mathsf{j}+\mathsf{k}) \mapsto -)) \land \mathsf{m} = \#\alpha \land R.$$

Inserting an Element

$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto \alpha_{k+1}) \ * \ (\bigodot_{k=0}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -))$$
$$\quad \wedge\, m = \#\alpha \wedge R \wedge m < n\}$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto \alpha_{k+1}) \ * \ (\bigodot_{k=0}^{0} \phi(j+k) \mapsto -) \ *$$
$$\quad (\bigodot_{k=1}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -)) \wedge m = \#\alpha \wedge R \wedge m < n\}$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto \alpha_{k+1}) \ * \ \phi(j) \mapsto - \ *$$
$$\quad (\bigodot_{k=1}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -)) \wedge m = \#\alpha \wedge R \wedge m < n\}$$
$$[j] := x\,;$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto \alpha_{k+1}) \ * \ \phi(j) \mapsto x \ *$$
$$\quad (\bigodot_{k=1}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -)) \wedge m = \#\alpha \wedge R \wedge m < n\}$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto \alpha_{k+1}) \ * \ \phi(i+m) \mapsto x \ *$$
$$\quad (\bigodot_{k=1}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -)) \wedge m = \#\alpha \wedge R \wedge m < n\}$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto (\alpha{\cdot}x)_{k+1}) \ * \ \phi(i+m) \mapsto (\alpha{\cdot}x)_{m+1} \ *$$
$$\quad (\bigodot_{k=1}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -)) \wedge m = \#\alpha \wedge R \wedge m < n\}$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto (\alpha{\cdot}x)_{k+1}) \ * \ (\bigodot_{k=m}^{m} \phi(i+k) \mapsto (\alpha{\cdot}x)_{k+1}) \ *$$
$$\quad (\bigodot_{k=1}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -)) \wedge m = \#\alpha \wedge R \wedge m < n\}$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m} \phi(i+k) \mapsto (\alpha{\cdot}x)_{k+1}) \ * \ (\bigodot_{k=1}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -))$$
$$\quad \wedge\, m+1 = \#(\alpha{\cdot}x) \wedge R \wedge m < n\}$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m} \phi(i+k) \mapsto (\alpha{\cdot}x)_{k+1}) \ * \ (\bigodot_{k=0}^{n-m-2} \phi(j+k+1) \mapsto -))$$
$$\quad \wedge\, m+1 = \#(\alpha{\cdot}x) \wedge R \wedge m < n\}$$
$$m := m+1\,;\ \textbf{if}\ j = l+n-1\ \textbf{then}\ j := l\ \textbf{else}\ j := j+1$$
$$\{((\bigodot_{k=0}^{m-1} \phi(i+k) \mapsto (\alpha{\cdot}x)_{k+1}) \ * \ (\bigodot_{k=0}^{n-m-1} \phi(j+k) \mapsto -))$$
$$\quad \wedge\, m = \#(\alpha{\cdot}x) \wedge R\}$$

Connecting Two Views of Lists



If

$$\mathsf{list}\ \epsilon\ \mathsf{i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{emp} \wedge \mathsf{i} = \mathbf{nil}$$

$$\mathsf{list}\ (\mathsf{a}{\cdot}\alpha)\ \mathsf{i} \stackrel{\text{def}}{=} \exists \mathsf{j}.\ \mathsf{i} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{j} \ *\ \mathsf{list}\ \alpha\ \mathsf{j}$$

and

$$\mathsf{listN}\ \epsilon\ \mathsf{i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{emp} \wedge \mathsf{i} = \mathbf{nil}$$

$$\mathsf{listN}\ (\mathsf{b}{\cdot}\sigma)\ \mathsf{i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{b} = \mathsf{i} \wedge \exists \mathsf{j}.\ \mathsf{i} + 1 \mapsto \mathsf{j} \ *\ \mathsf{listN}\ \sigma\ \mathsf{j},$$

then

$$\mathsf{list}\ \alpha\ \mathsf{i} \Leftrightarrow \exists \sigma.\ \#\sigma = \#\alpha \wedge (\mathsf{listN}\ \sigma\ \mathsf{i} \ *\ \bigodot_{\mathsf{k}=1}^{\#\alpha} \sigma_k \mapsto \alpha_k).$$

The proof is by induction on α.

Specifying Subset Lists

Let $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$ and $\sigma \in (\mathbf{Z}^*)^*$ in

$\{\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i}\}$
"Set j to list of lists of subsets of i"
$\{\exists\sigma, \beta.\ \ \mathsf{ss}(\alpha^\dagger, \sigma) \wedge (\mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j} \ * \ (Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta)))\}$,

where

$$\begin{aligned}
\#\mathsf{ext}_\mathsf{a}\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \#\sigma \\
(\mathsf{ext}_\mathsf{a}\sigma)_i &\stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{a}{\cdot}\sigma_i \\[1ex]
\mathsf{ss}(\epsilon, \sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma = [\epsilon] \\
\mathsf{ss}(\mathsf{a}{\cdot}\alpha, \sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists\sigma'.\ \ \mathsf{ss}(\alpha, \sigma') \wedge \sigma = (\mathsf{ext}_\mathsf{a}\sigma')^\dagger{\cdot}\sigma' \\[1ex]
Q(\sigma, \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \#\beta = \#\sigma \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta}(\mathsf{list}\,\sigma_\mathsf{i}\,\beta_\mathsf{i} \ * \ \mathbf{true}) \\[1ex]
R(\beta) &\stackrel{\text{def}}{=} (\beta_{\#\beta} = \mathbf{nil} \wedge \mathbf{emp}) \ * \\
&\qquad\qquad \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta-1}(\exists\mathsf{a}, \mathsf{k}.\ \ \mathsf{i} < \mathsf{k} \leq \#\beta \wedge \beta_\mathsf{i} \mapsto \mathsf{a}, \beta_\mathsf{k}).
\end{aligned}$$

Some Properties

The predicates

$$Q(\sigma, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \#\beta = \#\sigma \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta}(\mathsf{list}\, \sigma_{\mathsf{i}}\, \beta_{\mathsf{i}} \;*\; \mathbf{true})$$

$$R(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_{\#\beta} = \mathbf{nil} \wedge \mathbf{emp}) \;*\; \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta-1}(\exists \mathsf{a}, \mathsf{k}.\;\; \mathsf{i} < \mathsf{k} \le \#\beta \wedge \beta_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, \beta_{\mathsf{k}})$$

$$W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\gamma = \#\beta \wedge \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma} \gamma_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\beta^{\dagger})_{\mathsf{i}}$$

satisfy

$$Q([\epsilon], [\mathbf{nil}]) \Leftrightarrow \mathbf{true}$$

$$R([\mathbf{nil}]) \Leftrightarrow \mathbf{emp}$$

$$W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \;*\; \mathsf{g} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{b} \Leftrightarrow W(\beta\cdot\mathsf{b}, \mathsf{g}\cdot\gamma, \mathsf{a})$$

$$Q(\sigma, \beta) \;*\; W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \Rightarrow Q((\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma)^{\dagger}\cdot\sigma, \gamma\cdot\beta)$$

$$R(\beta) \;*\; W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \Rightarrow R(\gamma\cdot\beta)$$

$$(Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta)) \;*\; W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \Rightarrow Q((\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma)^{\dagger}\cdot\sigma, \gamma\cdot\beta) \wedge R(\gamma\cdot\beta).$$

Proofs (1)

$$
\begin{aligned}
& W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \ * \ \mathsf{g} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{b} \\
& \quad \Leftrightarrow \#\gamma = \#\beta \wedge \Big(\mathsf{g} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{b} \ * \ \textstyle\bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma} \gamma_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\beta^{\dagger})_{\mathsf{i}}\Big) \\
& \quad \Leftrightarrow \#\mathsf{g}{\cdot}\gamma = \#\beta{\cdot}\mathsf{b} \wedge \Big(\Big(\textstyle\bigodot_{\mathsf{i}=1}^{1} (\mathsf{g}{\cdot}\gamma)_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, ((\beta{\cdot}\mathsf{b})^{\dagger})_{\mathsf{i}}\Big) \ * \\
& \qquad\quad \Big(\textstyle\bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\mathsf{g}\cdot\gamma-1} (\mathsf{g}{\cdot}\gamma)_{\mathsf{i}+1} \mapsto \mathsf{a}, ((\beta{\cdot}\mathsf{b})^{\dagger})_{\mathsf{i}+1}\Big)\Big) \\
& \quad \Leftrightarrow \#\mathsf{g}{\cdot}\gamma = \#\beta{\cdot}\mathsf{b} \wedge \textstyle\bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\mathsf{g}\cdot\gamma} (\mathsf{g}{\cdot}\gamma)_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, ((\beta{\cdot}\mathsf{b})^{\dagger})_{\mathsf{i}} \\
& \quad \Leftrightarrow W(\beta{\cdot}\mathsf{b}, \mathsf{g}{\cdot}\gamma, \mathsf{a}).
\end{aligned}
$$

Proofs (2)

Let

$$p(\mathsf{i}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{list}\,\sigma_{\mathsf{i}}\,\beta_{\mathsf{i}}$$

$$q(\mathsf{i}) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\beta^{\dagger})_{\mathsf{i}}$$

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \#\sigma.$$

Then

$$\begin{aligned}
&Q(\sigma, \beta) \ast W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \\
&\quad\Rightarrow \left(\#\beta = n \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta}(p(\mathsf{i}) \ast \mathbf{true})\right) \ast \left(\#\gamma = \#\beta \wedge \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma} q(\mathsf{i})\right) \\
&\quad\Rightarrow \#\beta = n \wedge \#\gamma = n \wedge \left(\left(\forall_{\mathsf{i}=1}^{n}(p(\mathsf{i}) \ast \mathbf{true})\right) \ast \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{n} q(\mathsf{i})\right) \\
&\quad\Rightarrow \#\beta = n \wedge \#\gamma = n \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(p(\mathsf{i}) \ast \mathbf{true} \ast \bigodot_{\mathsf{j}=1}^{n} q(\mathsf{j})\Big) \\
&\quad\Rightarrow \#\beta = n \wedge \#\gamma = n \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(p(\mathsf{i}) \ast \mathbf{true}\Big) \wedge \\
&\qquad\quad \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(p(n+1-\mathsf{i}) \ast \mathbf{true} \ast \bigodot_{\mathsf{j}=1}^{n} q(\mathsf{j})\Big) \\
&\quad\Rightarrow \#\beta = n \wedge \#\gamma = n \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(p(\mathsf{i}) \ast \mathbf{true}\Big) \wedge \\
&\qquad\quad \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(p(n+1-\mathsf{i}) \ast \mathbf{true} \ast q(\mathsf{i})\Big) \\
&\quad\Rightarrow \#\beta = n \wedge \#\gamma = n \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(p(\mathsf{i}) \ast \mathbf{true}\Big) \wedge \\
&\qquad\quad \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(\mathsf{list}\,(\sigma^{\dagger})_{\mathsf{i}}\,(\beta^{\dagger})_{\mathsf{i}} \ast \mathbf{true} \ast \gamma_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\beta^{\dagger})_{\mathsf{i}}\Big) \\
&\quad\Rightarrow \#\gamma = n \wedge \#\beta = n \wedge \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(\mathsf{list}\,\sigma_{\mathsf{i}}\,\beta_{\mathsf{i}} \ast \mathbf{true}\Big) \wedge \\
&\qquad\quad \forall_{\mathsf{i}=1}^{n}\Big(\mathsf{list}\,((\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma)^{\dagger})_{\mathsf{i}}\,\gamma_{\mathsf{i}} \ast \mathbf{true}\Big) \\
&\quad\Rightarrow \#\gamma{\cdot}\beta = \#(\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma)^{\dagger}{\cdot}\sigma \wedge \\
&\qquad\quad \forall_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma\cdot\beta}\Big(\mathsf{list}\,((\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma)^{\dagger}{\cdot}\sigma)_{\mathsf{i}}\,(\gamma{\cdot}\beta)_{\mathsf{i}} \ast \mathbf{true}\Big) \\
&\quad\Rightarrow Q((\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma)^{\dagger}{\cdot}\sigma, \gamma{\cdot}\beta).
\end{aligned}$$

Proofs (3)

$$
\begin{aligned}
& R(\beta) \ast W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \\
& \quad \Rightarrow (\beta_{\#\beta} = \mathbf{nil} \wedge \mathbf{emp}) \ast \\
& \qquad \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma} \gamma_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\beta^{\dagger})_{\mathsf{i}} \ast \\
& \qquad \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta-1} (\exists \mathsf{a}, \mathsf{k}.\ \ \mathsf{i} < \mathsf{k} \le \#\beta \wedge \beta_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, \beta_{\mathsf{k}}) \\
& \quad \Rightarrow ((\gamma{\cdot}\beta)_{\#\gamma\cdot\beta} = \mathbf{nil} \wedge \mathbf{emp}) \ast \\
& \qquad \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma} (\exists \mathsf{a}, \mathsf{k}.\ \ \#\gamma < \mathsf{k} \le \#\gamma{\cdot}\beta \wedge (\gamma{\cdot}\beta)_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\gamma{\cdot}\beta)_{\mathsf{k}}) \ast \\
& \qquad \bigodot_{\mathsf{i}=\#\gamma+1}^{\#\gamma\cdot\beta-1} (\exists \mathsf{a}, \mathsf{k}.\ \ \mathsf{i} < \mathsf{k} \le \#\gamma{\cdot}\beta \wedge (\gamma{\cdot}\beta)_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\gamma{\cdot}\beta)_{\mathsf{k}}) \\
& \quad \Rightarrow ((\gamma{\cdot}\beta)_{\#\gamma\cdot\beta} = \mathbf{nil} \wedge \mathbf{emp}) \ast \\
& \qquad \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma\cdot\beta-1} (\exists \mathsf{a}, \mathsf{k}.\ \ \mathsf{i} < \mathsf{k} \le \#\gamma{\cdot}\beta \wedge (\gamma{\cdot}\beta)_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, (\gamma{\cdot}\beta)_{\mathsf{k}}) \\
& \quad \Rightarrow R(\gamma{\cdot}\beta).
\end{aligned}
$$

From (2) and (3), we have

$$
\begin{aligned}
& (Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta)) \ast W(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \\
& \quad \Rightarrow (Q(\sigma, \beta) \ast W(\beta, \gamma, \mathsf{a})) \wedge (R(\beta) \ast W(\beta, \gamma, \mathsf{a})) \\
& \quad \Rightarrow Q((\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma)^{\dagger}{\cdot}\sigma, \gamma{\cdot}\beta) \wedge R(\gamma{\cdot}\beta).
\end{aligned}
$$

An Iterative Program for Subset Lists

Final Assertion

$$\exists \sigma, \beta.\ \ \mathsf{ss}(\alpha^\dagger, \sigma) \wedge (\mathsf{list}\, \beta\, \mathsf{j}\ *\ (Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta)))$$

Outer Invariant

$$\begin{gathered}\exists \alpha', \alpha'', \sigma, \beta.\ \ \alpha'^\dagger{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha', \sigma) \wedge \\ (\mathsf{list}\, \alpha''\, \mathsf{i}\ *\ \mathsf{list}\, \beta\, \mathsf{j}\ *\ (Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta)))\end{gathered}$$

Inner Invariant

$$\begin{gathered}\exists \alpha', \alpha'', \sigma, \beta', \beta'', \gamma.\ \ \alpha'^\dagger{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha', \sigma) \wedge \\ (\mathsf{list}\, \alpha''\, \mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\, \gamma\, (\mathsf{l}, \mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\, \beta'\, (\mathsf{j}, \mathsf{m})\ *\ \mathsf{list}\, \beta''\, \mathsf{m}\ * \\ (Q(\sigma, \beta'{\cdot}\beta'') \wedge R(\beta'{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta', \gamma, \mathsf{a}))\end{gathered}$$

After inner loop:

$$\begin{gathered}\exists \alpha', \alpha'', \sigma, \beta', \gamma.\ \ \alpha'^\dagger{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha', \sigma) \wedge \\ (\mathsf{list}\, \alpha''\, \mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\, \gamma\, (\mathsf{l}, \mathsf{j})\ *\ \mathsf{list}\, \beta'\, \mathsf{j}\ * \\ (Q(\sigma, \beta') \wedge R(\beta'))\ *\ W(\beta', \gamma, \mathsf{a}))\end{gathered}$$

Iterative Subset Lists: The Main Program

$\{\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i}\}$

$\mathsf{j} := \mathbf{cons}(\mathbf{nil}, \mathbf{nil})\ ;$

$\{\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i} \ast \mathsf{j} \mapsto \mathbf{nil}, \mathbf{nil}\}$

$\{\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i} \ast \mathsf{list}\,[\mathbf{nil}]\,\mathsf{j}\}$

$\{\mathsf{ss}(\epsilon, [\epsilon]) \wedge (\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i} \ast \mathsf{list}\,[\mathbf{nil}]\,\mathsf{j} \ast (Q([\epsilon], [\mathbf{nil}]) \wedge R([\mathbf{nil}])))\}$

$\{\exists \alpha', \alpha'', \sigma, \beta.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha', \sigma) \wedge$

$\quad (\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ast \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j} \ast (Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta)))\}$

$\mathbf{while}\ \mathsf{i} \neq \mathbf{nil}\ \mathbf{do}$ *Body of the Outer Loop*

$\{\exists \sigma, \beta.\ \ \mathsf{ss}(\alpha^{\dagger}, \sigma) \wedge (\mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j} \ast (Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta)))\}$

Iterative Subset Lists: Body of the Outer Loop

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta,\mathsf{a},\mathsf{k}.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha',\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{i} \mapsto \mathsf{a},\mathsf{k} \ * \ \mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{k} \ * \ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j} \ * \ (Q(\sigma,\beta) \wedge R(\beta)))\}$$

$\big(\mathsf{a} := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{k} := [\mathsf{i}+1]\ ;\ \textbf{dispose}\ \mathsf{i}\ ;\ \textbf{dispose}\ \mathsf{i}+1\ ;\ \mathsf{i} := \mathsf{k}\ ;$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha',\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j} \ * \ (Q(\sigma,\beta) \wedge R(\beta)))\}$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha',\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{lseg}\,\epsilon\,(\mathsf{j},\mathsf{j}) \ * \ \mathsf{lseg}\,\epsilon\,(\mathsf{j},\mathsf{j}) \ * \ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j} \ *$$
$$(Q(\sigma,\epsilon{\cdot}\beta) \wedge R(\epsilon{\cdot}\beta)) \ * \ W(\epsilon,\epsilon,\mathsf{a}))\}$$

$\mathsf{l} := \mathsf{j}\ ;\ \mathsf{m} := \mathsf{j}\ ;$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha',\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{lseg}\,\epsilon\,(\mathsf{l},\mathsf{j}) \ * \ \mathsf{lseg}\,\epsilon\,(\mathsf{j},\mathsf{m}) \ * \ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{m} \ *$$
$$(Q(\sigma,\epsilon{\cdot}\beta) \wedge R(\epsilon{\cdot}\beta)) \ * \ W(\epsilon,\epsilon,\mathsf{a}))\}$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha',\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j}) \ * \ \mathsf{lseg}\,\beta'\,(\mathsf{j},\mathsf{m}) \ * \ \mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m} \ *$$
$$(Q(\sigma,\beta'{\cdot}\beta'') \wedge R(\beta'{\cdot}\beta'')) \ * \ W(\beta',\gamma,\mathsf{a}))\}$$

while $\mathsf{m} \neq$ **nil do** *Body of the Inner Loop*

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\gamma.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha',\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j}) \ * \ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{j} \ *$$
$$(Q(\sigma,\beta') \wedge R(\beta')) \ * \ W(\beta',\gamma,\mathsf{a}))\}$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\gamma.\ \ (\mathsf{a}{\cdot}\alpha')^{\dagger}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\mathsf{a}{\cdot}\alpha',(\mathsf{ext_a}\sigma)^{\dagger}{\cdot}\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{list}\,(\gamma{\cdot}\beta')\,\mathsf{l} \ * \ (Q((\mathsf{ext_a}\sigma)^{\dagger}{\cdot}\sigma,\gamma{\cdot}\beta') \wedge R(\gamma{\cdot}\beta')))\}$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\alpha'' = \alpha \wedge \mathsf{ss}(\alpha',\sigma) \wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{l} \ * \ (Q(\sigma,\beta) \wedge R(\beta)))\}$$

$\mathsf{j} := \mathsf{l}\big)$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma,\mathsf{b},\mathsf{m}''.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha''=\alpha\wedge\mathsf{ss}(\alpha',\sigma)\wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\,\beta'\,(\mathsf{j},\mathsf{m})\ *\ \mathsf{m}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{m}''\ *$$
$$\mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m}''\ *\ (Q(\sigma,\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta'')\wedge R(\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta',\gamma,\mathsf{a}))\}$$

$$\big(\mathsf{b}:=[\mathsf{m}]\,;$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma,\mathsf{m}''.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha''=\alpha\wedge\mathsf{ss}(\alpha',\sigma)\wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\,\beta'\,(\mathsf{j},\mathsf{m})\ *\ \mathsf{m}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{m}''\ *$$
$$\mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m}''\ *\ (Q(\sigma,\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta'')\wedge R(\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta',\gamma,\mathsf{a}))\}$$

$$\mathsf{m}:=[\mathsf{m}+1]\,;$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma,\mathsf{m}'.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha''=\alpha\wedge\mathsf{ss}(\alpha',\sigma)\wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\,\beta'\,(\mathsf{j},\mathsf{m}')\ *\ \mathsf{m}'\mapsto\mathsf{b},\mathsf{m}\ *$$
$$\mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m}\ *\ (Q(\sigma,\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta'')\wedge R(\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta',\gamma,\mathsf{a}))\}$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha''=\alpha\wedge\mathsf{ss}(\alpha',\sigma)\wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\,\beta'{\cdot}\mathsf{b}\,(\mathsf{j},\mathsf{m})\ *\ \mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m}\ *$$
$$(Q(\sigma,\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta'')\wedge R(\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta',\gamma,\mathsf{a}))\}$$

$$\mathsf{g}:=\mathbf{cons}(\mathsf{a},\mathsf{b})\,;$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha''=\alpha\wedge\mathsf{ss}(\alpha',\sigma)\wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\,\beta'{\cdot}\mathsf{b}\,(\mathsf{j},\mathsf{m})\ *\ \mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m}\ *$$
$$(Q(\sigma,\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta'')\wedge R(\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta',\gamma,\mathsf{a})\ *\ \mathsf{g}\mapsto\mathsf{a},\mathsf{b})\}$$

$$\mathsf{l}:=\mathbf{cons}(\mathsf{g},\mathsf{l})$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma,\mathsf{l}'.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha''=\alpha\wedge\mathsf{ss}(\alpha',\sigma)\wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{l}\mapsto\mathsf{g},\mathsf{l}'\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{l}',\mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\,\beta'{\cdot}\mathsf{b}\,(\mathsf{j},\mathsf{m})\ *\ \mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m}\ *$$
$$(Q(\sigma,\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta'')\wedge R(\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta',\gamma,\mathsf{a})\ *\ \mathsf{g}\mapsto\mathsf{a},\mathsf{b})\}$$

$$\{\exists\alpha',\alpha'',\sigma,\beta',\beta'',\gamma.\ \ \alpha'^{\dagger}{\cdot}\mathsf{a}{\cdot}\alpha''=\alpha\wedge\mathsf{ss}(\alpha',\sigma)\wedge$$
$$(\mathsf{list}\,\alpha''\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\,\mathsf{g}{\cdot}\gamma\,(\mathsf{l},\mathsf{j})\ *\ \mathsf{lseg}\,\beta'{\cdot}\mathsf{b}\,(\mathsf{j},\mathsf{m})\ *\ \mathsf{list}\,\beta''\,\mathsf{m}\ *$$
$$(Q(\sigma,\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta'')\wedge R(\beta'{\cdot}\mathsf{b}{\cdot}\beta''))\ *\ W(\beta'{\cdot}\mathsf{b},\mathsf{g}{\cdot}\gamma,\mathsf{a}))\}\big)\,;$$

A Recursive Program for Subset Lists

Let

$$W'(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\gamma = \#\beta \wedge \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\gamma} \gamma_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, \beta_{\mathsf{i}},$$

which satisfies

$$W'(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \ * \ \mathsf{g} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{b} \Leftrightarrow W'(\mathsf{b}{\cdot}\beta, \mathsf{g}{\cdot}\gamma, \mathsf{a}).$$

Then the procedure

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{extapp}(\mathsf{a}, \mathsf{i}, \mathsf{j}; \mathsf{k}) = \\
\quad \mathbf{if}\ \mathsf{i} = \mathbf{nil}\ \mathbf{then}\ \mathsf{k} := \mathsf{j}\ \mathbf{else} \\
\quad\quad \mathbf{newvar}\ \mathsf{b}, \mathsf{i}', \mathsf{g}\ \mathbf{in} \\
\quad\quad\quad \big(\mathsf{b} := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{i}' := [\mathsf{i} + 1]\ ; \\
\quad\quad\quad \mathsf{extapp}(\mathsf{a}, \mathsf{i}', \mathsf{j}; \mathsf{k})\ ; \\
\quad\quad\quad \mathsf{g} := \mathbf{cons}(\mathsf{a}, \mathsf{b})\ ;\ \mathsf{k} := \mathbf{cons}(\mathsf{g}, \mathsf{k})\big)
\end{array}
$$

satisfies

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{list}\ \beta\ \mathsf{i}\} \\
\mathsf{extapp}(\mathsf{a}, \mathsf{i}, \mathsf{j}; \mathsf{k}) \\
\{\exists \gamma.\ \ \mathsf{list}\ \beta\ \mathsf{i}\ \ast\ \mathsf{lseg}\ \gamma\ (\mathsf{k}, \mathsf{j})\ \ast\ W'(\beta, \gamma, \mathsf{a})\}
\end{array}
$$

since

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{i}\}\\
\textbf{if } \mathsf{i} = \textbf{nil then } \mathsf{k} := \mathsf{j} \textbf{ else}\\
\quad \{\exists \mathsf{b}, \mathsf{i}', \beta'.\;\; \beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{i}' \,*\, \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}')\}\\
\quad \textbf{newvar } \mathsf{b}, \mathsf{i}', \mathsf{g} \textbf{ in}\\
\qquad \big(\mathsf{b} := [\mathsf{i}]\,;\, \mathsf{i}' := [\mathsf{i}+1]\,;\\
\qquad \{\exists \beta'.\;\; \beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{i}' \,*\, \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}')\}\\
\qquad \{\exists \beta'.\;\; (\beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{i}') \,*\, \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\}\\
\qquad \mathsf{extapp}(\mathsf{a}, \mathsf{i}', \mathsf{j}; \mathsf{k})\,;\\
\qquad \{\exists \beta'.\;\; (\beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{i}') \,*\\
\qquad\quad (\exists \gamma'.\;\; \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}' \,*\, \mathsf{lseg}\,\gamma'\,(\mathsf{k},\mathsf{j}) \,*\, W'(\beta', \gamma', \mathsf{a}))\}\\
\qquad \{\exists \beta', \gamma'.\;\; \beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge\\
\qquad\quad (\mathsf{list}\,(\mathsf{b}{\cdot}\beta')\,\mathsf{i} \,*\, \mathsf{lseg}\,\gamma'\,(\mathsf{k},\mathsf{j}) \,*\, W'(\beta', \gamma', \mathsf{a}))\}\\
\qquad \mathsf{g} := \textbf{cons}(\mathsf{a}, \mathsf{b});\\
\qquad \{\exists \beta', \gamma'.\;\; \beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge\\
\qquad\quad (\mathsf{list}\,(\mathsf{b}{\cdot}\beta')\,\mathsf{i} \,*\, \mathsf{lseg}\,\gamma'\,(\mathsf{k},\mathsf{j}) \,*\, W'(\mathsf{b}{\cdot}\beta', \mathsf{g}{\cdot}\gamma', \mathsf{a}))\}\\
\qquad \mathsf{k} := \textbf{cons}(\mathsf{g}, \mathsf{k})\\
\qquad \{\exists \beta', \gamma'.\;\; \beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge\\
\qquad\quad (\mathsf{list}\,(\mathsf{b}{\cdot}\beta')\,\mathsf{i} \,*\, \mathsf{lseg}\,\mathsf{g}{\cdot}\gamma'\,(\mathsf{k},\mathsf{j}) \,*\, W'(\mathsf{b}{\cdot}\beta', \mathsf{g}{\cdot}\gamma', \mathsf{a}))\}\\
\qquad \big)\\
\{\exists \gamma.\;\; \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{i} \,*\, \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{k},\mathsf{j}) \,*\, W'(\beta, \gamma, \mathsf{a})\}
\end{array}
$$

Reasoning about the Call

From the recursion assumption:

$$\{\mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{i}\}$$
$$\mathsf{extapp}(\mathsf{a},\mathsf{i},\mathsf{j};\mathsf{k})$$
$$\{\exists\gamma.\ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{k},\mathsf{j})\ *\ W'(\beta,\gamma,\mathsf{a})\}$$

by free variable substitution (FVS):

$$\{\mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\}$$
$$\mathsf{extapp}(\mathsf{a},\mathsf{i}',\mathsf{j};\mathsf{k})$$
$$\{\exists\gamma.\ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{k},\mathsf{j})\ *\ W'(\beta',\gamma,\mathsf{a})\}$$

by renaming (RN) in the postcondition:

$$\{\mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\}$$
$$\mathsf{extapp}(\mathsf{a},\mathsf{i}',\mathsf{j};\mathsf{k})$$
$$\{\exists\gamma'.\ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma'\,(\mathsf{k},\mathsf{j})\ *\ W'(\beta',\gamma',\mathsf{a})\}$$

by the frame rule (FR):

$$\{(\beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{b},\mathsf{i}')\ *\ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\}$$
$$\mathsf{extapp}(\mathsf{a},\mathsf{i}',\mathsf{j};\mathsf{k})\ ;$$
$$\{(\beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{b},\mathsf{i}')\ *$$
$$(\exists\gamma'.\ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma'\,(\mathsf{k},\mathsf{j})\ *\ W'(\beta',\gamma',\mathsf{a}))\}$$

by introducing existential quantification (EQ):

$$\{\exists\beta'.\ (\beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{b},\mathsf{i}')\ *\ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\}$$
$$\mathsf{extapp}(\mathsf{a},\mathsf{i}',\mathsf{j};\mathsf{k})\ ;$$
$$\{\exists\beta'.\ (\beta = \mathsf{b}{\cdot}\beta' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{b},\mathsf{i}')\ *$$
$$(\exists\gamma'.\ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{i}'\ *\ \mathsf{lseg}\,\gamma'\,(\mathsf{k},\mathsf{j})\ *\ W'(\beta',\gamma',\mathsf{a}))\}$$

Another Recursive Procedure

Let

$$\mathsf{ss}'(\epsilon, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma = [\epsilon]$$

$$\mathsf{ss}'(\mathsf{a}{\cdot}\alpha, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \exists \sigma'.\ \ \mathsf{ss}'(\alpha, \sigma') \land \sigma = (\mathsf{ext_a}\sigma'){\cdot}\sigma'$$

and, as before,

$$Q(\sigma, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \#\beta = \#\sigma \land \forall_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta}(\mathsf{list}\,\sigma_{\mathsf{i}}\,\beta_{\mathsf{i}}\ *\ \mathbf{true})$$

$$R(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_{\#\beta} = \mathbf{nil} \land \mathbf{emp})\ *\ \bigodot_{\mathsf{i}=1}^{\#\beta-1}(\exists \mathsf{a}, \mathsf{k}.\ \ \mathsf{i} < \mathsf{k} \le \#\beta \land \beta_{\mathsf{i}} \mapsto \mathsf{a}, \beta_{\mathsf{k}})$$

$$\#\mathsf{ext_a}\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \#\sigma$$

$$(\mathsf{ext_a}\sigma)_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{a}{\cdot}\sigma_i,$$

which satisfy

$$Q([\epsilon], [\mathbf{nil}]) \Leftrightarrow \mathbf{true}$$

$$R([\mathbf{nil}]) \Leftrightarrow \mathbf{emp}$$

$$Q(\sigma, \beta)\ *\ W'(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \Rightarrow Q((\mathsf{ext_a}\sigma){\cdot}\sigma, \gamma{\cdot}\beta)$$

$$R(\beta)\ *\ W'(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \Rightarrow R(\gamma{\cdot}\beta)$$

$$(Q(\sigma, \beta) \land R(\beta))\ *\ W'(\beta, \gamma, \mathsf{a}) \Rightarrow Q((\mathsf{ext_a}\sigma){\cdot}\sigma, \gamma{\cdot}\beta) \land R(\gamma{\cdot}\beta).$$

Then the procedure

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{subsets}(\mathsf{i};\mathsf{j}) = \\
&\quad \textbf{if } \mathsf{i} = \textbf{nil then } \mathsf{j} := \textbf{cons}(\textbf{nil}, \textbf{nil}) \textbf{ else} \\
&\qquad \textbf{newvar } \mathsf{a}, \mathsf{i}', \mathsf{j}' \textbf{ in} \\
&\qquad\quad \big(\mathsf{a} := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{i}' := [\mathsf{i}+1]\ ; \\
&\qquad\quad \mathsf{subsets}(\mathsf{i}';\mathsf{j}')\ ; \\
&\qquad\quad \mathsf{extapp}(\mathsf{a}, \mathsf{j}', \mathsf{j}'; \mathsf{j})\big)
\end{aligned}
$$

satisfies

$$
\begin{aligned}
&\{\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i}\} \\
&\mathsf{subsets}(\mathsf{i};\mathsf{j}) \\
&\{\exists\sigma,\beta.\ \ \mathsf{ss}'(\alpha,\sigma) \wedge \big(\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i}\ *\ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j}\ *\ (Q(\sigma,\beta) \wedge R(\beta))\big)\}
\end{aligned}
$$

since

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i}\}\\
\textbf{if } \mathsf{i} = \textbf{nil then } \mathsf{j} := \textbf{cons}(\textbf{nil}, \textbf{nil}) \textbf{ else}\\
\quad \{\exists \mathsf{a}, \mathsf{i}', \alpha'.\ \ \alpha = \mathsf{a}{\cdot}\alpha' \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{i}' \ * \ \mathsf{list}\,\alpha'\,\mathsf{i}')\}\\
\quad \textbf{newvar } \mathsf{a}, \mathsf{i}', \mathsf{j}' \textbf{ in}\\
\qquad \big(\mathsf{a} := [\mathsf{i}]\,;\, \mathsf{i}' := [\mathsf{i}+1]\,;\\
\qquad \{\exists \alpha'.\ \ \alpha = \mathsf{a}{\cdot}\alpha' \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{i}' \ * \ \mathsf{list}\,\alpha'\,\mathsf{i}')\}\\
\qquad \{\exists \alpha'.\ \ (\alpha = \mathsf{a}{\cdot}\alpha' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{i}') \ * \ \mathsf{list}\,\alpha'\,\mathsf{i}'\}\\
\qquad \mathsf{subsets}(\mathsf{i}'; \mathsf{j}')\,;\\
\qquad \{\exists \alpha'.\ \ (\alpha = \mathsf{a}{\cdot}\alpha' \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{a}, \mathsf{i}') \ *\\
\qquad\quad \big(\exists \sigma', \beta'.\ \ \mathsf{ss}'(\alpha', \sigma') \wedge \big(\mathsf{list}\,\alpha'\,\mathsf{i}' \ *\\
\qquad\qquad \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{j}' \ * \ (Q(\sigma', \beta') \wedge R(\beta'))\big)\big)\}\\
\qquad \{\exists \alpha', \sigma', \beta'.\ \ \big(\alpha = \mathsf{a}{\cdot}\alpha' \wedge \mathsf{ss}'(\alpha', \sigma') \wedge\\
\qquad\qquad (\mathsf{list}\,(\mathsf{a}{\cdot}\alpha')\,\mathsf{i} \ * \ (Q(\sigma', \beta') \wedge R(\beta')))\big) \ *\\
\qquad\quad \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{j}'\}\\
\qquad \mathsf{extapp}(\mathsf{a}, \mathsf{j}', \mathsf{j}'; \mathsf{j})\\
\qquad \{\exists \alpha', \sigma', \beta'.\ \ \big(\alpha = \mathsf{a}{\cdot}\alpha' \wedge \mathsf{ss}'(\alpha', \sigma') \wedge\\
\qquad\qquad (\mathsf{list}\,(\mathsf{a}{\cdot}\alpha')\,\mathsf{i} \ * \ (Q(\sigma', \beta') \wedge R(\beta')))\big) \ *\\
\qquad\quad (\exists \gamma.\ \ \mathsf{list}\,\beta'\,\mathsf{j}' \ * \ \mathsf{lseg}\,\gamma\,(\mathsf{j}, \mathsf{j}') \ * \ W'(\beta', \gamma, \mathsf{a}))\}\\
\qquad \{\exists \alpha', \sigma', \beta', \gamma.\ \ \alpha = \mathsf{a}{\cdot}\alpha' \wedge \mathsf{ss}'(\mathsf{a}{\cdot}\alpha', (\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma'){\cdot}\sigma') \wedge\\
\qquad\quad \big(\mathsf{list}\,(\mathsf{a}{\cdot}\alpha')\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{list}\,(\gamma{\cdot}\beta')\,\mathsf{j} \ *\\
\qquad\qquad (Q((\mathsf{ext}_{\mathsf{a}}\sigma'){\cdot}\sigma', \gamma{\cdot}\beta') \wedge R(\gamma{\cdot}\beta'))\big)\}\big)\\
\{\exists \sigma, \beta.\ \ \mathsf{ss}'(\alpha, \sigma) \wedge \big(\mathsf{list}\,\alpha\,\mathsf{i} \ * \ \mathsf{list}\,\beta\,\mathsf{j} \ * \ (Q(\sigma, \beta) \wedge R(\beta))\big)\}
\end{array}
$$

Arrays that Denote Sequences

$$\mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\alpha = \mathsf{b} - \mathsf{a} + 1 \wedge \bigodot_{\mathsf{i}=\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} \mathsf{i} \mapsto \alpha_{\mathsf{i}-\mathsf{a}+1}.$$

Properties

$$\begin{aligned}
\mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) &\Rightarrow \#\alpha = \mathsf{b} - \mathsf{a} + 1 \\
\mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) &\Rightarrow \mathsf{i} \hookrightarrow \alpha_{\mathsf{i}-\mathsf{a}+1} \quad \text{when } \mathsf{a} \leq \mathsf{i} \leq \mathsf{b} \\
\mathsf{array}\ \epsilon\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) &\Leftrightarrow \mathsf{b} = \mathsf{a} - 1 \wedge \mathbf{emp} \\
\mathsf{array}\ \mathsf{x}\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) &\Leftrightarrow \mathsf{b} = \mathsf{a} \wedge \mathsf{a} \mapsto \mathsf{x} \\
\mathsf{array}\ \mathsf{x}{\cdot}\alpha\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) &\Leftrightarrow \mathsf{a} \mapsto \mathsf{x}\ *\ \mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a} + 1, \mathsf{b}) \\
\mathsf{array}\ \alpha{\cdot}\mathsf{x}\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) &\Leftrightarrow \mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a}, \mathsf{b} - 1)\ *\ \mathsf{b} \mapsto \mathsf{x} \\
\mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a}, \mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \beta\ (\mathsf{c} + 1, \mathsf{b}) & \\
&\Leftrightarrow \mathsf{array}\ \alpha{\cdot}\beta\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) \wedge \mathsf{c} = \mathsf{a} + \#\alpha - 1 \\
&\Leftrightarrow \mathsf{array}\ \alpha{\cdot}\beta\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) \wedge \mathsf{c} = \mathsf{b} - \#\beta
\end{aligned}$$

A Subtlety

In the following annotated specification, note that the assertion following the second **else** depends upon

$$\mathsf{c} + 1 \hookrightarrow \mathsf{x} \wedge \mathsf{d} - 1 \hookrightarrow \mathsf{y} \wedge \mathsf{x} > \mathsf{r} \wedge \mathsf{y} \leq r \Rightarrow \mathsf{c} + 1 \neq \mathsf{d} - 1.$$

Partition

$\{\mathsf{array}\ \alpha(\mathsf{a},\mathsf{b})\}$

$\textbf{newvar}\ \mathsf{d},\mathsf{x},\mathsf{y}\ \textbf{in}\ \big(\mathsf{c} := \mathsf{a}-1\,;\mathsf{d} := \mathsf{b}+1\,;$

$\{\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\ (\mathsf{array}\ \alpha_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{d}-1)\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_3\,(\mathsf{d},\mathsf{b}))$

$\quad\wedge\ \alpha_1{\cdot}\alpha_2{\cdot}\alpha_3 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \mathsf{r} \wedge \{\alpha_3\} >^* \mathsf{r}\}$

$\textbf{while}\ \mathsf{d} > \mathsf{c}+1\ \textbf{do}\ \big(\mathsf{x} := [\mathsf{c}+1];$

$\quad\textbf{if}\ \mathsf{x} \leq \mathsf{r}\ \textbf{then}$

$\quad\quad\{\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\ (\mathsf{array}\ \alpha_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{c}+1 \mapsto \mathsf{x}\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_2\,(\mathsf{c}+2,\mathsf{d}-1)$

$\quad\quad\quad *\ \mathsf{array}\ \alpha_3\,(\mathsf{d},\mathsf{b})) \wedge \alpha_1{\cdot}\mathsf{x}{\cdot}\alpha_2{\cdot}\alpha_3 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1{\cdot}\mathsf{x}\} \leq^* \mathsf{r} \wedge \{\alpha_3\} >^* \mathsf{r}\}$

$\quad\quad\mathsf{c} := \mathsf{c}+1$

$\quad\textbf{else}\ \big(\mathsf{y} := [\mathsf{d}-1];$

$\quad\quad\textbf{if}\ \mathsf{y} > \mathsf{r}\ \textbf{then}$

$\quad\quad\quad\{\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\ (\mathsf{array}\ \alpha_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{d}-2)\ *\ \mathsf{d}-1 \mapsto \mathsf{y}$

$\quad\quad\quad\quad *\ \mathsf{array}\ \alpha_3\,(\mathsf{d},\mathsf{b})) \wedge \alpha_1{\cdot}\alpha_2{\cdot}\mathsf{y}{\cdot}\alpha_3 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \mathsf{r} \wedge \{\mathsf{y}{\cdot}\alpha_3\} >^* \mathsf{r}\}$

$\quad\quad\quad\mathsf{d} := \mathsf{d}-1$

$\quad\quad\textbf{else}$

$\quad\quad\quad\{\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\ (\mathsf{array}\ \alpha_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{c}+1 \mapsto \mathsf{x}$

$\quad\quad\quad\quad *\ \mathsf{array}\ \alpha_2\,(\mathsf{c}+2,\mathsf{d}-2)\ *\ \mathsf{d}-1 \mapsto \mathsf{y}\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_3\,(\mathsf{d},\mathsf{b}))$

$\quad\quad\quad\quad \wedge\ \alpha_1{\cdot}\mathsf{x}{\cdot}\alpha_2{\cdot}\mathsf{y}{\cdot}\alpha_3 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \mathsf{r} \wedge \{\alpha_3\} >^* \mathsf{r} \wedge \mathsf{x} > \mathsf{r} \wedge \mathsf{y} \leq \mathsf{r}\}$

$\quad\quad\quad([\mathsf{c}+1] := \mathsf{y}\,;[\mathsf{d}-1] := \mathsf{x}\,;\mathsf{c} := \mathsf{c}+1\,;\mathsf{d} := \mathsf{d}-1)\big)\big)\big)$

$\{\exists\alpha_1,\alpha_2.\ (\mathsf{array}\ \alpha_1(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_2(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}))$

$\quad\wedge\ \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \mathsf{r} \wedge \mathsf{r} <^* \{\alpha_2\}\}$

From Partition to Quicksort

Thus, if we define

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{partition}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{r};\mathsf{c}) = \\
\quad \mathbf{newvar}\ \mathsf{d},\mathsf{x},\mathsf{y}\ \mathbf{in}\ \big(\mathsf{c} := \mathsf{a}-1\ ;\ \mathsf{d} := \mathsf{b}+1\ ; \\
\quad \mathbf{while}\ \mathsf{d} > \mathsf{c}+1\ \mathbf{do} \\
\qquad \big(\mathsf{x} := [\mathsf{c}+1]\ ;\ \mathbf{if}\ \mathsf{x} \leq \mathsf{r}\ \mathbf{then}\ \mathsf{c} := \mathsf{c}+1\ \mathbf{else} \\
\qquad\quad \big(\mathsf{y} := [\mathsf{d}-1]\ ;\ \mathbf{if}\ \mathsf{y} > \mathsf{r}\ \mathbf{then}\ \mathsf{d} := \mathsf{d}-1\ \mathbf{else} \\
\qquad\qquad ([\mathsf{c}+1] := \mathsf{y}\ ;\ [\mathsf{d}-1] := \mathsf{x}\ ;\ \mathsf{c} := \mathsf{c}+1\ ;\ \mathsf{d} := \mathsf{d}-1)\big)\big)\big),
\end{array}
$$

we have

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{array}\ \alpha(\mathsf{a},\mathsf{b})\} \\
\mathsf{partition}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{r};\mathsf{c}) \\
\{\exists\alpha_1,\alpha_2.\ (\mathsf{array}\ \alpha_1(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_2(\mathsf{c}+1,\mathsf{b})) \\
\quad \wedge\ \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \mathsf{r} \wedge \mathsf{r} <^* \{\alpha_2\}\}.
\end{array}
$$

Now assume

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a},\mathsf{b})\} \\
\mathsf{quicksort}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \\
\{\exists\beta.\ \mathsf{array}\ \beta\ (\mathsf{a},\mathsf{b}) \wedge \beta \sim \alpha \wedge \mathbf{ord}\ \beta\}.
\end{array}
$$

Then

$$\{\mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a},\mathsf{b})\}$$

$$\textbf{if } \mathsf{a} < \mathsf{b} \textbf{ then newvar } \mathsf{c} \textbf{ in}$$

$$\Big(\{\exists \mathsf{x}_1, \alpha_0, \mathsf{x}_2.\ (\mathsf{a} \mapsto \mathsf{x}_1\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_0(\mathsf{a}+1, \mathsf{b}-1)\ *\ \mathsf{b} \mapsto \mathsf{x}_2)$$

$$\wedge\ \mathsf{x}_1{\cdot}\alpha_0{\cdot}\mathsf{x}_2 \sim \alpha\}$$

$$\textbf{newvar } \mathsf{x1}, \mathsf{x2}, \mathsf{r} \textbf{ in}$$

$$\big(\mathsf{x1} := [\mathsf{a}]\ ;\ \mathsf{x2} := [\mathsf{b}]\ ;$$

$$\textbf{if } \mathsf{x1} > \mathsf{x2} \textbf{ then } ([\mathsf{a}] := \mathsf{x2}\ ;\ [\mathsf{b}] := \mathsf{x1}) \textbf{ else skip}\ ;$$

$$\mathsf{r} := (\mathsf{x1} + \mathsf{x2}) \div 2\ ;$$

$$\{\exists \mathsf{x}_1, \alpha_0, \mathsf{x}_2.\ (\mathsf{a} \mapsto \mathsf{x}_1\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_0(\mathsf{a}+1, \mathsf{b}-1)\ *\ \mathsf{b} \mapsto \mathsf{x}_2)$$

$$\wedge\ \mathsf{x}_1{\cdot}\alpha_0{\cdot}\mathsf{x}_2 \sim \alpha \wedge \mathsf{x}_1 \leq \mathsf{r} \leq \mathsf{x}_2\}$$

$$\mathsf{partition}(\mathsf{a}+1, \mathsf{b}-1, \mathsf{r}; \mathsf{c})$$

$$\{\exists \mathsf{x}_1, \alpha_1, \alpha_2, \mathsf{x}_2.$$

$$(\mathsf{a} \mapsto \mathsf{x}_1 * \mathsf{array}\ \alpha_1(\mathsf{a}+1, \mathsf{c}) * \mathsf{array}\ \alpha_2(\mathsf{c}+1, \mathsf{b}-1) * \mathsf{b} \mapsto \mathsf{x}_2)$$

$$\wedge\ \mathsf{x}_1{\cdot}\alpha_1{\cdot}\alpha_2{\cdot}\mathsf{x}_2 \sim \alpha \wedge \mathsf{x}_1 \leq \mathsf{r} \leq \mathsf{x}_2 \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \mathsf{r} \wedge \mathsf{r} <^* \{\alpha_2\}\}\big)\ ;$$

$$\{\exists \alpha_1, \alpha_2.\ (\mathsf{array}\ \alpha_1\ (\mathsf{a}, \mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_2\ (\mathsf{c}+1, \mathsf{b}))$$

$$\wedge\ \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \{\alpha_2\}\}$$

$$\mathsf{quicksort}(\mathsf{a}, \mathsf{c})\ ;$$

$$\{\exists \beta_1, \alpha_2.\ (\mathsf{array}\ \beta_1\ (\mathsf{a}, \mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \alpha_2\ (\mathsf{c}+1, \mathsf{b}))$$

$$\wedge\ \beta_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\beta_1\} \leq^* \{\alpha_2\} \wedge \textbf{ord}\ \beta_1\}$$

$$\mathsf{quicksort}(\mathsf{c}+1, \mathsf{b})$$

$$\{\exists \beta_1, \beta_2.\ (\mathsf{array}\ \beta_1\ (\mathsf{a}, \mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\ \beta_2\ (\mathsf{c}+1, \mathsf{b}))$$

$$\wedge\ \beta_1{\cdot}\beta_2 \sim \alpha \wedge \{\beta_1\} \leq^* \{\beta_2\} \wedge \textbf{ord}\ \beta_1 \wedge \textbf{ord}\ \beta_2\}\Big)$$

$$\textbf{else skip}$$

$$\{\exists \beta.\ \mathsf{array}\ \beta\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) \wedge \beta \sim \alpha \wedge \textbf{ord}\ \beta\}$$

Quicksort (continued)

so that we may define

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{quicksort}(\mathsf{a},\mathsf{b}) = \\
\quad \mathbf{if}\ \mathsf{a} < \mathsf{b}\ \mathbf{then\ newvar}\ \mathsf{c}\ \mathbf{in} \\
\quad\quad \big(\mathbf{newvar}\ \mathsf{x1},\mathsf{x2},\mathsf{r}\ \mathbf{in} \\
\quad\quad\quad \big(\mathsf{x1} := [\mathsf{a}]\ ;\ \mathsf{x2} := [\mathsf{b}]\ ; \\
\quad\quad\quad \mathbf{if}\ \mathsf{x1} > \mathsf{x2}\ \mathbf{then}\ ([\mathsf{a}] := \mathsf{x2}\ ;\ [\mathsf{b}] := \mathsf{x1})\ \mathbf{else\ skip}\ ; \\
\quad\quad\quad \mathsf{r} := (\mathsf{x1} + \mathsf{x2}) \div 2\ ;\ \mathsf{partition}(\mathsf{a}+1, \mathsf{b}-1, \mathsf{r}; \mathsf{c})\big)\ ; \\
\quad\quad \mathsf{quicksort}(\mathsf{a},\mathsf{c})\ ;\ \mathsf{quicksort}(\mathsf{c}+1,\mathsf{b})\big) \\
\quad \mathbf{else\ skip}.
\end{array}
$$

Reasoning about the First Recursive Call

From the assumption

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{array}\ \alpha\ (\mathsf{a},\mathsf{b})\} \\
\mathsf{quicksort}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \\
\{\exists\beta.\ \mathsf{array}\ \beta\ (\mathsf{a},\mathsf{b}) \wedge \beta \sim \alpha \wedge \mathbf{ord}\ \beta\},
\end{array}
$$

substitution (SUB) gives

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{array}\ \alpha_1\ (\mathsf{a},\mathsf{c})\} \\
\mathsf{quicksort}(\mathsf{a},\mathsf{c}) \\
\{\exists\beta_1.\ \mathsf{array}\ \beta_1\ (\mathsf{a},\mathsf{c}) \wedge \beta_1 \sim \alpha_1 \wedge \mathbf{ord}\ \beta_1\}.
\end{array}
$$

Reasoning about the First Recursive Call (continued)

Then the frame rule (FR) gives the main step in

$$
\begin{aligned}
&\{(\mathsf{array}\,\alpha_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\,\alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}))\\
&\quad \wedge \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \{\alpha_2\}\}\\
&\{\mathsf{array}\,\alpha_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\\
&\quad *\ (\mathsf{array}\,\alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}) \wedge \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \{\alpha_2\})\}\\
&\mathsf{quicksort}(\mathsf{a},\mathsf{c})\\
&\{(\exists\beta_1.\ \mathsf{array}\,\beta_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c}) \wedge \beta_1 \sim \alpha_1 \wedge \mathbf{ord}\,\beta_1)\\
&\quad *\ (\mathsf{array}\,\alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}) \wedge \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \{\alpha_2\})\}\\
&\{\exists\beta_1.\ (\mathsf{array}\,\beta_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\,\alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}))\\
&\quad \wedge \beta_1 \sim \alpha_1 \wedge \mathbf{ord}\,\beta_1 \wedge \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \{\alpha_2\}\},
\end{aligned}
$$

and existential quantification (EQ) gives the main step in

$$
\begin{aligned}
&\{\exists\alpha_1,\alpha_2.\ (\mathsf{array}\,\alpha_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\,\alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}))\\
&\quad \wedge \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \{\alpha_2\}\}\\
&\mathsf{quicksort}(\mathsf{a},\mathsf{c})\,;\\
&\{\exists\alpha_1,\alpha_2,\beta_1.\ (\mathsf{array}\,\beta_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\,\alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}))\\
&\quad \wedge \beta_1 \sim \alpha_1 \wedge \mathbf{ord}\,\beta_1 \wedge \alpha_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\alpha_1\} \leq^* \{\alpha_2\}\}\\
&\{\exists\beta_1,\alpha_2.\ (\mathsf{array}\,\beta_1\,(\mathsf{a},\mathsf{c})\ *\ \mathsf{array}\,\alpha_2\,(\mathsf{c}+1,\mathsf{b}))\\
&\quad \wedge \beta_1{\cdot}\alpha_2 \sim \alpha \wedge \{\beta_1\} \leq^* \{\alpha_2\} \wedge \mathbf{ord}\,\beta_1\}.
\end{aligned}
$$