$\neg\phi \equiv \phi \to F$

$\neg\neg\phi \equiv \neg\phi \to F \equiv (\phi \to F) \to F$

Assume $\neg\phi$

Prove F

conclude $\underbrace{\neg\phi \to F}_{\neg\neg\phi}$

DNEG ϕ

$a \vee b \to F$

$\equiv$

$\neg a \wedge \neg b \to \neg(a \vee b)$

1 assume $\neg a \wedge \neg b$

2 assume $(a \vee b)$

3 $\neg a$ $\wedge$-E 1 $(a \to F)$

4 $\neg b$ $\wedge$E 1 $(b \to F)$

5 F $\vee$E 2 3 4

6 $\neg(a \vee b) \equiv (a \vee b) \to F$

7 $(\neg a \wedge \neg b) \to \neg(a \vee b)$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$ premises / conclusion

DNE 1

$$\frac{\quad}{\neg\neg\phi \to \phi}$$

DNE 2

Z O T

$Z(0)$ $O(S0)$ $T(SS0)$

$\forall n.\ Z(n) \to Z(SSSn)$

$\forall n.\ O(n) \to O(SSSn)$

$\forall n.\ T(n) \to T(SSSn)$

$Z(n) \to Z(SSSn) \lor O(SSSn) \lor T(SSSn)$

RTP: $\forall n : \mathbb{N}.\ Z(n) \lor O(n) \lor T(n)$

IH: $(Z(n) \lor O(n) \lor T(n))$

$\land\ (Z(Sn) \lor O(Sn) \lor T(Sn))$

$\land\ (Z(SSn) \lor O(SSn) \lor T(SSn))$

$$\forall n\ \forall d\ \exists r\ \exists q.\ n = r + q \cdot d$$
$$\land\ 0 \le r \le d-1$$